Teoretická část - 18.1.2021

1. (a) Definujte spojitost funkce v bodě, spojitost funkce zleva a zprava v bodě a spojitost funkce na intervalu (2 body).

   (b) Zformulujte a dokažte větu o Darbouxově vlastnosti pro spojité funkce a pomocí této věty ukažte, že existuje řešení rovnice

   $$\arctan(40 - \log_{10}(x^{10} + 1)) = \frac{\pi}{4} e^{\sin(30x) + x^{54321}}$$

   na intervalu $[-2, 2]$. Můžete využít odhad $e > 2$ (4 body).

   (c) Rozhodněte, zda existuje $f \in C((0, 1])$ taková, že

   - $f(\frac{1}{2n}) > 1$ a $f(\frac{1}{2n+1}) < -1$, $n \in \mathbb{N}$,
   - neexistuje posloupnost $\{x_n\}$ splňující $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ existuje a je rovna $\frac{1}{2}$.

   Řádně zdůvodněte (2 body)

2. (a) Definujte derivaci funkce v bodě (1 bod).
   (b) Zformulujte větu o aritmetice derivací a větu o derivaci složené funkce (2 body).
   (c) Dokažte jednu část věty o aritmetice derivací (1 bod).
   (d) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má vlastní derivaci na $\mathbb{R}$. Položme $g = f^2$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
      (i) je-li $f'(0) = 0$, potom $g'(0)$ existuje a je rovna 0,
      (ii) pokud $g'(0)$ existuje a je rovna 0, potom $f'(0) = 0$,
      (iii) je-li f lichá, potom je g sudá,
      (iv) je-li f lichá, potom je f' sudá,
      (v) je-li f' sudá, potom je f lichá.

      Vše řádně zdůvodněte (4 body).

3. (a) Definujte druhou derivaci funkce v bodě (1 bod).
   (b) Definujte Taylorův polynom a zformulujte větu o Peanově tvaru zbytku (2 body).
   (c) Napište Leibnizův vzorec. (1 bod).
   (d) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, pro které platí
      – $f(1) = 2$, $f'(1) = 0$, $f''(1) = -1$, $f'''(1) = -3$, $f^{(4)}(1) = 0$, $f^{(5)}(1) = 4$, $f^{(6)}(1) = -1$ a $f^{(7)}(1) = 2$,
      – $g(1) = 0$, $g'(1) = 0$, $g''(1) = 0$, $g'''(1) = -1$, $g^{(4)}(1) = 1$, $g^{(5)}(1) = -1$, $g^{(6)}(1) = 1$ a $g^{(7)}(1) = -1$.

      Položme $h = fg$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      (i) h má Taylorův polynom stupně 7 se středem v bodě 1,
      (ii) h má Taylorův polynom stupně 7 se středem v bodě 1 a koeficient tohoto polynomu u $(x-1)^7$ je 7,
      (iii) funkce h má v bodě 1 lokální maximum,
      (iv) existuje $C \in \mathbb{R}$, že $|h(x)| \leq C(x-1)^2$, $x \in [0, 2]$.

      Vše řádně zdůvodněte (4 body).